

A-132**B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2022****MATHEMATICS****Paper - II****(Calculus)***Time : 3 Hours]**[Maximum Marks : 66***Section-A****(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :- Answer all ten questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)**(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B**(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :- Answer all five questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)**(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C**(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :- Answer any three questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)**(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

Section-A

(खण्ड-अ)

1. (i) Define Asymptotes.

अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write the parametric equation of radius of curvature.

वक्रता-त्रिज्या का प्राचलिक समीकरण लिखिए।

(iii) State the Euler's theorem on homogeneous function.

समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय का कथन लिखिए।

(iv) If :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

then find the value of :

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$$

यदि :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

है तो $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(v) What are the sufficient conditions for a function $f(a, b)$ to be an extreme value ?

फलन $f(a, b)$ के चरम मान ज्ञात करने के लिए क्या पर्याप्त शर्तें होती हैं ?

(vi) Write down the importance of curve tracing.

वक्र अनुरेखण का महत्व लिखिए।

(vii) Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

(viii) Prove that :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = 3$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = 3$$

(ix) Define Quadrature.

क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।

(x) Write down the formula for volume of solid of revolution (about x -axis).

परिक्रमण घनाकृति का आयतन ज्ञात करने का सूत्र लिखिए (x -अक्ष के परितः)।

Section-B

(खण्ड-ब)

2. Show that the envelope of straight line joining the two extremities of a pair of semi-conjugate diameters of the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

is the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

के अर्ध-संयुग्मी व्यासों के सिरे को मिलाने वाली रेखा का अन्वालोप $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ है।

4

Or

(अथवा)

Find the length of chord of curvature through the pole of the cardioid
 $r = a(1 + \cos \theta)$.

कार्डियोइड $r = a(1 + \cos \theta)$ के ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता-जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

3. If $u = e^{xyz}$, then prove that :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

यदि $u = e^{xyz}$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

4

Or

(अथवा)

If $u = f(y - z, z - x, x - y)$, then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

4

4. Find the points where the function $x^3 + y^3 - 3axy$ has maximum or minimum value.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $x^3 + y^3 - 3axy$ का मान उच्चतम या न्यूनतम है। 4

3R-264

(4)

A-132

Or

(अथवा)

If $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$, where :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

prove that the stationary value of u is given by :

$$x = \frac{\Sigma a}{a}, y = \frac{\Sigma a}{b}, z = \frac{\Sigma a}{c}$$

यदि $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$, जहाँ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

सिद्ध कीजिए कि u का स्तब्ध मान निम्न से प्राप्त होता है :

$$x = \frac{\Sigma a}{a}, y = \frac{\Sigma a}{b}, z = \frac{\Sigma a}{c}$$

4

5. Evaluate the following integral by changing to polar co-ordinates :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{(x^2+y^2)} dx dy$$

निम्न समाकलन को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित करके मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{(x^2+y^2)} dx dy$$

4

Or

(अथवा)

Evaluate :

(i) $\Gamma(-1/2)$

(ii) $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

(iii) $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$

(iv) $\int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx$

मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\Gamma(-1/2)$

(ii) $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

(iii) $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$

(iv) $\int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{m-1} dx$

1×4=4

6. (i) State Dirichlet's integral.

डिरिचलेट समाकलन का कथन लिखिए।

(ii) Show that :

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

1,3

Or

(अथवा)

Find the surface of the solid generated by the revolution of the astroid $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ about the x -axis.

ऐस्ट्रॉयड $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ द्वारा x -अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित घनाकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4

BR-264

(6)

A-132

Section-C

(खण्ड-स)

7. (i) Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

- (ii) At any point P of the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

prove that :

$$\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3} = (ab)^{-2/3} (a^2 + b^2),$$

where ρ_1, ρ_2 are the radii of curvature at the extremities of the conjugate diameters.

दीर्घवृत्त :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

के किसी बिन्दु P पर सिद्ध कीजिए :

$$\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3} = (ab)^{-2/3} (a^2 + b^2),$$

जहाँ ρ_1, ρ_2 संयुग्मी व्यास के छोरों पर वक्रता-त्रिज्याएँ हैं।

8. (i) Find $\frac{dy}{dx}$, when $x^3 + y^3 = 3axy$.

ज्ञात कीजिए $\frac{dy}{dx}$, जबकि $x^3 + y^3 = 3axy$.

- (ii) If :

$$u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3 x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3},$$

prove that :

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4$$

यदि :

$$u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3 x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3},$$

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4$$

3,9

9. Trace the curve :

$$y^2(a + x) = x^2(a - x)$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$y^2(a + x) = x^2(a - x)$$

12

10. Change the order of integration in the following double integral :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} v \, dx \, dy$$

निम्न द्वि-समाकल का क्रम बदलिए :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} v \, dx \, dy$$

12

11. Find the area common to the following curves :

$$r = a, r = a(1 + \cos \theta)$$

निम्न वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$r = a, r = a(1 + \cos \theta)$$

12